⋆

Exercice 1 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) Montrer que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$, et que dans ce cas p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
2) Montrer que si p est un projecteur, on a l'équivalence suivante pour tout vecteur x dans E :

$$x \in \mathrm{Im}(p) \Longleftrightarrow p(x) = x$$

En déduire que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

3) Montrer que $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{Id}_E$, et que dans ce cas s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

⋆

Exercice 2 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $q = \mathrm{id}_E - p$ est un projecteur si et seulement si p est un projecteur.
Exprimer dans ce cas $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
2) Montrer que $s = \mathrm{id}_E - 2p$ est une symétrie si et seulement si p est un projecteur.
Exprimer dans ce cas $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

⋆ ⋆

Exercice 3 — Voir correction

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$. Montrer que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E est non nulle.

⋆ ⋆

Exercice 4 — Voir correction

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des sous espaces vectoriels de E et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous espaces vectoriels de F.

1) Montrer que $f\left(E_1 + E_2 + \cdots + E_n\right) = f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$
2) Montrer que si f est injective et que la somme des E_i est directe, alors la somme des $f(E_i)$ est directe.
3) Montrer que $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \cdots + f^{-1}(F_p) \subset f^{-1}\left(F_1 + F_2 + \cdots + F_p\right)$
4) Donner un exemple dans lequel l'inclusion précédente est stricte.

⋆

Exercice 5 — Voir correction

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de $[0; \pi]$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $F = \mathrm{Vect}\left(\cos_{|[0,\pi]}, \sin_{|[0,\pi]}\right)$ et $G = \{f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\}$.

1) Montrer que $E = F \oplus G$
2) Soit p la projection sur F parallèlement à G. Déterminer $p(f)$ pour $f \in E$.

⋆

Exercice 6 — Voir correction

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et soient $F = \mathrm{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 0\}$.

1) Montrer que $E = F \oplus G$
2) Soit s la symétrie de E par rapport à F dans la direction de G. Déterminer la matrice représentative de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

⋆

Exercice 7 — Voir correction

(ENS 2022) On considère l'ensemble

$$F = \left\{(x_1, ..., x_{2n} \in \mathbb{R}^{2n} \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\right\}$$

et le sous-espace vectoriel G de $\mathbb{R}^{2n}$ engendré par le vecteur $u = (1, -1, 1, -1, ..., 1, -1)$.

1) a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2n}$.

b) Calculer sa dimension.

2) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{2n}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^{2n}$.

a) Donner le projeté de x sur F parallèlement à G

b) Donner le symétrique de x par rapport à F le long de G.

⋆

Exercice 8 — **Voir correction**

Soit n un entier non nul. On note tr l'application trace définie par $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \sum_{i=1}^n m_{i,i}$.

1) Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}\,(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{tr})$.

2) On considère $p \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ le projecteur sur $\text{Vect}\,(I_n)$ parallèlement à $\text{Ker}(\text{tr})$. Que vaut $p(M)$ pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

⋆ ⋆

Exercice 9 — **Voir correction**

Soit n un entier non nul et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère l'application $u : E \longrightarrow \mathbb{R}_1[X], P \longmapsto P(0)X + P(1)$

1) Montrer que $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}_1[X])$

2) Montrer que $E = \mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u)$

⋆

Exercice 10 — **Voir correction**

Soit E un un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ quelconque. Montrer que u et s commutent si et seulement si $\text{Ker}(s - \text{id})$ et $\text{Ker}(s + \text{id})$ sont stables par u.

⋆ ⋆

Exercice 11 — **Voir correction**

E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension $n \geq 1$ et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Montrer que $n - \text{tr}(s)$ est un entier pair.

⋆ ⋆

Exercice 12 — **Voir correction**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs tels que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$.
On pose $r = p + q - p \circ q$.

1) Montrer que r est un projecteur.

2) Montrer que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ et que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.

⋆ ⋆

Exercice 13 — **Voir correction**

Soient $p, n \geq 1$ deux entiers, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $g \circ f$ est un projecteur de rang p.

1) Montrer que $\text{rg}(g) \leq p$

2) En déduire que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im} g$ et que $\text{Ker} g = \{0\}$

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $g(f(g(x))) = g(x)$

4) Montrer que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^p}$.

Le coin des Khûbes

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 14 — **Voir correction**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient a et b deux symétries de E.

1) Développer et simplifier $(a + b) \circ (a - b)$ et $(a - b) \circ (a + b)$.

2) Montrer que $\text{Im}(a \circ b - b \circ a) \subset \text{Im}(a + b) \cap \text{Im}(a - b)$

3) Montrer enfin que $\text{Im}(a \circ b - b \circ a) = \text{Im}(a + b) \cap \text{Im}(a - b)$.

⋆⋆⋆

Exercice 15 — **Voir correction**

Soit $n \geq 1$ un entier.

1) Montrer que $s : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X], P(X) \longmapsto P(1-X)$ est une symétrie.
2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les deux assertions suivante sont équivalentes :
   (i) $\forall x \in \mathbb{R},\ P(1-x) = P(x)$
   (ii) la courbe représentative de P est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$
3) Montrer que $P \in \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ si et seulement si le polynôme $Q(X) = P(X + \frac{1}{2})$ définit une fonction paire.
4) Montrer qu'une fonction polynôme est paire si et seulement si tous ses termes de degré impair sont nuls.
5) Vérifier que $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$, $P(X) \mapsto P(X+\frac{1}{2})$ est un automorphisme et en déduire une base de $\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$
6) En raisonnant de façon analogue, déterminer une base de $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$

⋆⋆⋆

Exercice 16 — **Voir correction**

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit s un endomorphisme de E vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $s \circ s = \operatorname{Id}_E$
(ii) $s \neq \operatorname{Id}_E$
(iii) $s \neq -\operatorname{Id}_E$

On considère l'application φ définie par $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), f \mapsto \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s)$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
2) Montrer que s est diagonalisable et que son spectre est égal à $\{-1, 1\}$.

On notera dans la suite E_1 (resp. E_{-1}) le sous-espace propre de s associé à la valeur propre 1 (resp. -1).

3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$f \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff f(E_1) \subset E_{-1} \quad \text{et} \quad f(E_{-1}) \subset E_1$$

4) Soit λ une valeur propre de φ. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un vecteur propre associé. Soit $x \in E_1$. Déterminer une relation entre $f(x)$ et $s(f(x))$. Même question pour $x \in E_{-1}$.
5) Montrer que le spectre de φ est inclus dans $\{-1, 0, 1\}$.
6) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant égal à 1 et de degré 3 tel que $P(\varphi) = 0$.

Correction des exercice

Correction de l'exercice 1 : Ce sont des questions de cours :

1) Si p est un projecteur, alors il existe F et G supplémentaires dans E tels que p est la projection sur F parallèlement à G.
   Pour tout x dans E , on écrit $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et x_G dans G, donc $p(x) = x_F$ et :
   $$p(p(x)) = p(x_F) = x_F$$
   d'où $p(p(x)) = p(x)$. On a bien $p^2 = p$.
   Réciproquement, supposons que $p^2 = p$. Pour tout x dans E on peut écrire $x = x - p(x) + p(x)$ et remarquer que $p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0$ donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. De plus, si $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $x = p(x')$ pour un certain x' dans E, et $p(x) = 0$ donc $p^2(x') = 0$ et donc $x = p(x') = 0$ car $p^2(x') = p(x')$.
   On a donc $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_E\}$ donc $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p)$ sont supplémentaires dans E. Enfin, pour tout x dans E, $p(x)$ est la composante de x dans $\mathrm{Im}(p)$ donc p est bien la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
2) Si p est un projecteur, alors c'est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
   Pour tout x dans $\mathrm{Im}(p)$ on a $x = p(x')$ pour un certain $x' \in E$, donc $p(x) = p^2(x') = p(x') = x$.
   Réciproquement, si $x = p(x)$ alors x appartient à $\mathrm{Im}(p)$ par définition. On a donc bien
   $$x \in \mathrm{Im}(p) \Longleftrightarrow p(x) = x$$
   pour tout vecteur x dans E.
3) Supposons que s est une symétrie et montrons que $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
   Soient F et G supplémentaires dans E tels que s est une symétrie par rapport à F le Dans la direction de G. Pour tout vecteur x de E il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ tels que
   $$x = x_F + x_G$$
   et on a :
   $$s(x) = x_F - x_G$$
   d'où :
   $$s^2(x) = s(x_F - x_G) = x_F + x_G = x$$
   donc $s^2 = \mathrm{Id}_E$.
   Supposons que $s^2 = \mathrm{Id}_E$ et montrons que s est une symétrie. Pour tout vecteur x dans E, on peut écrire :
   $$x = \frac{1}{2}(x - s(x)) + \frac{1}{2}(x + s(x)$$
   en remarquant que $s(x - s(x)) = s(x) - s^2(x) = s(x) - x = -(x - s(x))$ et que $s(x + s(x)) = s(x) + x = x + s(x)$, on a $x - s(x) \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ et $x + s(x) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. On a donc montré que $E = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$. Montrons que cette somme est directe : soit $x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$, alors $s(x) = -x$ et $s(x) = x$ donc $x = -x$ et donc $x = 0$. Finalement : $E = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.
   Enfin, comme on l'a déjà observé, pour tout $x \in E$ on a :
   $$\begin{aligned} s(x) &= s\left(\frac{1}{2}(x - s(x)) + \frac{1}{2}(x + s(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}(s(x) - x) + \frac{1}{2}(s(x) + x) \\ &= -\frac{1}{2}(x - s(x)) + \frac{1}{2}(x + s(x)) \end{aligned}$$
   donc s est bien la symétrie parallèlement à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ dans la direction de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Correction de l'exercice 2 :

1)

$$\begin{aligned} q \text{ est un projecteur} &\iff (\mathrm{id}-p)^2 = \mathrm{id}-p \\ &\iff \mathrm{id}^2 - \mathrm{id}\circ p - p\circ \mathrm{id} + p^2 = \mathrm{id}-p \\ &\iff \mathrm{id} - 2p + p^2 = \mathrm{id}-p \\ &\iff p^2 = p \\ &\iff p \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

De plus, on a alors

$$\begin{aligned} x\in \mathrm{Ker}(q) &\iff (\mathrm{id}-p)(x) = 0 \\ &\iff x - p(x) = 0 \\ &\iff p(x) = x \\ &\iff x \in \mathrm{Im}(p) && \text{car } p \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x\in \mathrm{Im}(q) &\iff q(x) = x && \text{car } q \text{ est un projecteur} \\ &\iff x - p(x) = x \\ &\iff p(x) = 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}(p) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p) \text{ et } \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q).}$

2)

$$\begin{aligned} s \text{ est une symétrie} &\iff (\mathrm{id}-2p)^2 = \mathrm{id} \\ &\iff \mathrm{id} - 4p + 4p^2 = \mathrm{id} \\ &\iff p^2 = p \\ &\iff p \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} x\in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) &\iff s(x) = x \\ &\iff x - 2p(x) = x \\ &\iff p(x) = 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Ker}(p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x\in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}) &\iff s(x) + x = 0 \\ &\iff x - 2p(x) + x = 0 \\ &\iff p(x) = x \\ &\iff x \in \mathrm{Im}(p) && \text{car } p \text{ est un projecteur} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(p)}$.

Correction de l'exercice 3 : Il faut avoir l'idée de montrer par récurrence que pour tout entier p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geq n-p$ si $(H_1, ..., H_{n-1})$ est une famille d'hyperplans. Notons $\mathcal{P}(k)$ cette propriété.
Pour $k=2$, $\dim(H_1\cap H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1+H_2) \geq n-1+n-1-n = n-2$ car $H_1 + H_2 \subset E$ donc $\dim(H_1+H_2) \leq n$. La propriété est donc vraie pour $n=2$.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie pour un entier k donné, alors

$$\begin{aligned}\dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_{k+1}) &= \dim(H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k) + \dim(H_{k+1}) - \dim((H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k) + H_{k+1}) \\ &\geq n - k + n - 1 - n \\ &\geq n - (k+1)\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence et car $\dim((H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k) + H_{k+1}) \leq n$ d'après l'inclusion $((H_1 \cap H_2 \cap \cdots \cap H_k) + H_{k+1} \subset E$. Ainsi le résultat est vrai pour tout entier k donc l'intersection de $n-1$ hyperplans de E est de dimension supérieure ou égale à $n-(n-1) = 1$, donc non nulle.

Correction de l'exercice 4 :

1) Montrons l'inclusion dans le sens direct
Soit $y \in f(E_1 + E_2 + \cdots + E_n)$. Alors il existe $x \in E_1 + E_2 + \cdots + E_n$, $y = f(x)$ donc il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ tel que $y = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \in f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$ donc $f(E_1 + E_2 + \cdots + E_n) \subset f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$.
Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n)$. Il existe $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in f(E_1) \times f(E_2) \times \cdots \times f(E_n)$ tel que $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, donc il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ tels que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $y_i = f(x_i)$ et ainsi $y = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ car f est linéaire. Ainsi, $y \in f(E_1 + E_2 + \cdots + E_n)$ donc $f(E_1) + f(E_2) + \cdots + f(E_n) \subset f(E_1 + E_2 + \cdots + E_n)$.
2) Supposons f injective et $E_1, E_2, \ldots E_n$ en somme directe.
Soit $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in f(E_1) \times f(E_2) \times \cdots \times f(E_n)$ tels que $y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$
Alors il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ tels que $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $y_i = f(x_i)$, et $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) = 0$. Ainsi, $f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0$ donc $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ car f est injective. Or les E_i sont en somme directe donc $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. On en conclut que $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ donc que les $f(E_i)$ sont en somme directe.
3) Soit$x \in f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \cdots + f^{-1}(F_p)$. Il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in f^{-1}(F_1) \times f^{-1}(F_2) \times \cdots \times f^{-1}(F_p)$ tels que $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p$, et $f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_p)$.
Par hypothèse sur les x_i, on a $f(x_i) \in F_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, donc $f(x) \in F_1 + F_2 + \cdots + F_p$. On en conclut que $x \in f^{-1}(F_1 + F_2 + \cdots + F_p)$, donc que $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) + \cdots + f^{-1}(F_p) \subset f^{-1}(F_1 + F_2 + \cdots + F_p)$.
4) On considère $E = \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{L}(E, E)$ la projection sur $\operatorname{Vect}((1,0))$ parallèlement à $\operatorname{Vect}((0,1))$
On pose $F_1 = \operatorname{Ker}(f)$ et $F_2 = \operatorname{Vect}((1,1))$ (faire une figure). Alors $f^{-1}(F_1) = \{0\}$ et $f^{-1}(F_2) = \{0\}$, mais $F_1 \oplus F_2 = E$ donc $f^{-1}(F_1 + F_2) = E$. Ainsi, l'inclusion $f^{-1}(F_1) + f^{-1}(F_2) \subset f^{-1}(F_1 + F_2)$ est stricte.

Correction de l'exercice 5 :

1) Soit $f \in F \cap G$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in [0, \pi]$, $\quad f(x) = a\cos x + b \sin x$. De plus, $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$. Or $f(0) = a$, $f(\pi/2) = b$, et $f(\pi) = -a$.
$a = -a$ entraîne $a = 0$ et donc $b = f(\pi/2) = f(0) = a = 0$, ainsi $f = 0$. On en conclut que $F \cap G = \{0_E\}$ donc F et G sont en somme directe.
Remarque : E n'est pas de dimension finie, on ne peut pas raisonner sur les dimensions pour conclure.
Montrons que $E = F + G$ Soit $f \in E$, raisonnons par analyse-synthèse et supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g \in G$ tels que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + g(x)$.
Alors
$$\begin{cases} f(0) &= a + g(0) \\ f(\pi/2) &= b + g(\pi/2) \\ f(\pi) &= -a + g(\pi) \end{cases}$$
en posant $c = g(0) = g(\pi/2) = g(\pi)$, on a donc
$$\begin{cases} a + c &= f(0) \\ b + c &= f(\pi/2) \\ -a + c &= f(\pi) \end{cases}$$
qui équivaut à
$$\begin{cases} a &= \dfrac{f(0) - f(\pi)}{2} \\ b &= f(\pi/2) - \dfrac{f(0) + f(\pi)}{2} = \dfrac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2} \\ c &= \dfrac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{cases}$$
Réciproquement, soit $f \in E$, posons $a = \dfrac{f(0) - f(\pi)}{2}$ et $b = \dfrac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2}$, et posons pour tout $x \in [0, \pi]$, $g(x) = f(x) - a\cos(x) - b\sin(x)$.

Alors $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x) + g(x)$ par construction, g est continue comme somme de fonctions continues, et

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) - a \\ &= f(0) - \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \\ &= \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\pi/2) &= f(\pi/2) - b \\ &= f(\pi/2) - \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2} \\ &= \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g(\pi) &= f(\pi) + a \\ &= f(\pi) + \frac{f(0) - f(\pi)}{2} \\ &= \frac{f(0) + f(\pi)}{2} \end{aligned}$$

donc $g(0) = g(\pi/2) = g(\pi)$. Ainsi, $g \in G$. Finalement $f \in F + G$ donc $E \subset F + G$. L'inclusion $F + G \subset E$ est évidente car toute somme de fonctions continues sur $[0, \pi]$ est continue sur $[0, \pi]$.

2) D'après la question précédente, pour toute fonction $f \in E$,

$$p(f) : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{f(0) - f(\pi)}{2}\cos(x) + \frac{2f(\pi/2) - f(0) - f(\pi)}{2}\sin(x)$$

Correction de l'exercice 6 :

1) Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Alors $\exists a \in \mathbb{R}$, $(x, y, z) = a \cdot (1, -1, 1) = (a, -a, a)$. Comme $(x, y, z) \in G$ on a $2a - (-a) - a = 0$ donc $2a = 0$ donc $a = 0$. Ainsi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, donc F et G sont en somme directe.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On raisonne par analyse-synthèse en supposant qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $(x', y', z') \in G$ tels que

$$(x, y, z) = (a, -a, a) + (x', y', z')$$

Alors $(x', y', z') = (x - a, y + a, z - a)$ avec $2(x - a) - (y + a) - (z - a) = 0$ donc $2x - y - z = 2a$ donc

$$\boxed{a = \frac{2x - y - z}{2}}$$

.
On en déduit que

$$\boxed{(x', y', z') = \left(\frac{y + z}{2}, \frac{2x + y - z}{2}, \frac{-2x + y + 3z}{2}\right)}$$

Réciproquement, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, en posant $a = \frac{2x-y-z}{2}$ et $(x', y', z') = \left(\frac{y+z}{2}, \frac{2x+y-z}{2}, \frac{-2x+y+3z}{2}\right)$ on a bien

$$(x, y, z) = (a, -a, a) + (x', y', z')$$

d'après les calculs précédents, et $(x', y', z') \in G$ car

$$2 \times \frac{y + z}{2} - \frac{2x + y - z}{2} - \frac{-2x + y + 3z}{2} = 0$$

donc $(x, y, z) \in F + G$.
Finalement $E = F \oplus G$.

2) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on sait d'après la réponse à la question précédente que

$$(x,y,z) = \underbrace{\left(\frac{2x-y-z}{2}, -\frac{2x-y-z}{2}, \frac{2x-y-z}{2}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{y+z}{2}, \frac{2x+y-z}{2}, \frac{-2x+y+3z}{2}\right)}_{\in G}$$

On a donc

$$\begin{aligned} s(x,y,z) &= \left(\frac{2x-y-z}{2}, -\frac{2x-y-z}{2}, \frac{2x-y-z}{2}\right) - \left(\frac{y+z}{2}, \frac{2x+y-z}{2}, \frac{-2x+y+3z}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2x-2y-2z}{2}, \frac{-4x+2z}{2}, \frac{4x-2y-4z}{2}\right) \\ &= (x-y-z, -2x+z, 2x-y-2z) \end{aligned}$$

donc la matrice représentative de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 7 :

1) a) F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de 1 équations à $2n$ inconnues de rang 1, donc c'est un sous-espace vectoriel de dimension $2n-1$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

   b) On peut aussi voir F comme le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_{2n}) \mapsto x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}$. Cette application est non nulle donc elle est de rang 1 (car $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}(f)) > 0$), donc d'après le théorème du rang $\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2n - \mathrm{rg}(f) = 2n-1$.

2) Si $v = (x_1, ..., x_{2n}) \in F \cap G$ alors il existe un réel λ tel que $v = \lambda \dot{u}$ donc $v = (\lambda, -\lambda, \lambda, -\lambda, ..., \lambda, -\lambda)$. Comme $v \in F$ on a :

$$\lambda - (-\lambda) + \lambda - (-\lambda) + \cdots + \lambda - (-\lambda) = 0$$

donc

$$2n\lambda = 0$$

et donc $\lambda = 0$, d'où $v = 0$ et on en conclut que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^{2n}}\}$.
F et G sont en somme directe donc $\dim(F+G) = \dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G) = 2n-1+1 = 2n$. Comme $F+G \subset \mathbb{R}^{2n}$ on en déduit par inclusion et égalité des dimensions que $F+G = \mathbb{R}^{2n}$. On a donc montré que $\mathbb{R}^{2n} = F \oplus G$.

3) Soit $x = (x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. Supposons qu'il existe un vecteur $y = (y_1, ..., y_{2n})$ dans F et un vecteur $z = (a, -a, ..., a, -a)$ dans G (avec $a \in \mathbb{R}$) tels que

$$x = y + z$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1 &=& x_1 - a \\ y_2 &=& x_2 + a \\ y_3 &=& x_3 - a \\ y_4 &=& x_4 + a \\ & \vdots & \\ y_{2n-1} &=& x_{2n-1} - a \\ y_{2n} &=& x_{2n} + a \end{array} \right.$$

et comme $y_1 - y_2 + \cdots + y_{2n-1} - y_{2n} = 0$ on a :

$$(x_1 - a) - (x_2 + a) + (x_3 - a) - (x_4 + a) + \cdots + (x_{2n-1} - a) - (x_{2n} + a) = 0$$

d'où

$$a = \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}}{2n}$$

Réciproquement, pour un vecteur $x = (x_1, ..., x_{2n})$ donné de $\mathbb{R}^{2n}$, si on pose $a = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n}}{2n}$ et $y = (x_1 - a, x_2 + a, ..., x_{2n-1} - a, x_{2n} + a)$ alors on vérifie facilement que $y \in F$ et $z = (a, -a, ..., a, -a) \in G$ et que $x = y + z$. Cela donne la décomposition de x dans $F \oplus G$, ainsi :

   a) Le projeté de x sur F parallèlement à G est $(x_1 - a, x_2 + a, ..., x_{2n-1} - a, x_{2n} + a)$ avec $a = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} -}{2n}$

   b) Le projeté de x par rapport à F le long de G est

$$y - z = (x_1 - 2a, x_2 + 2a, x_3 - 2a, x_4 + 2a, ..., x_{2n-1} - 2a, x_{2n} + 2a)$$

Correction de l'exercice 8 :

1) Montrons que $\text{Vect}(I_n)$ et $\text{Ker}(\text{tr})$ sont en somme directe.
Soit $M \in \text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(\text{tr})$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda \cdot I_n$, donc $\text{tr}(M) = n\lambda$. Or $\text{tr}(M) = 0$ donc $\lambda n = 0$ et ainsi $\lambda = 0$. On en déduit que $M = 0$, donc finalement que $\text{Vect}(I_n) \cap \text{Ker}(\text{tr}) = \{0\}$.
Montrons que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr})$. On a déjà l'inclusion $\text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Raisonnons par analyse synthèse et supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' \in \text{Ker}(\text{tr})$ tels que $M = \lambda \cdot I_n + M'$.
Alors $\text{tr}(M) = n\lambda + \text{tr}(M') = n\lambda$. On en déduit que $\lambda = \dfrac{\text{tr}(M)}{n}$ et que $M' = M - \dfrac{\text{tr}(M)}{n} \cdot I_n$.
Réciproquement, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en posant $\lambda = \dfrac{\text{tr}(M)}{n}$ et $M' = M - \dfrac{\text{tr}(M)}{n} \cdot I_n$, on a $\lambda \cdot I_n + M' = M$, et $\lambda \cdot I_n \in \text{Vect}(I_n)$ et $\text{tr}(M') = \text{tr}(M) - \dfrac{\text{tr}(M)}{n}\text{tr}(I_n) = \text{tr}(M) - \dfrac{\text{tr}(M)}{n} \times n = 0$ donc $M' \in \text{Ker}(\text{tr})$. Ainsi, toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr})$, donc finalement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) + \text{Ker}(\text{tr})$.
$\boxed{\text{On en conclut que } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{tr}).}$
Remarque : on peut aussi remarquer que $\dim(\text{Vect}(I_n)) + \dim(\text{Ker}(\text{tr})) = 1 + n - 1 = n$ pour conclure en deux lignes.

2) D'après la question précédente, $p(M) = \dfrac{\text{tr}(M)}{n} I_n$.

Correction de l'exercice 9 :

1) Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(0)X + (\lambda P + \mu Q)(1) \\ &= \lambda P(0)X + \mu Q(0)X + \lambda P(1) + \mu Q(1) \\ &= \lambda(P(0)X + P(1)) + \mu(Q(0)X + Q(1)) \\ &= \lambda u(P) + \mu u(Q) \end{aligned}$$

donc $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}_1[X])$.

2) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] \cap \text{Ker}(u)$. Il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que $P(X) = a_1 X + a_0$. Puisque $P \in \text{Ker}(u)$, on a $u(P) = 0$ c'est à dire que le polynôme $P(0)X + P(1)$ est le polynôme nul.
Or $P(0)X + P(1) = a_0 X + a_1 + a_0$, ce polynôme est nul si et seulement si (a_0, a_1) vérifie $\begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 + a_0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 0 \end{cases}$ donc finalement $P = 0$.
Ainsi $\mathbb{R}_1[X] \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$. On en déduit que $\text{Ker}(u)$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe.
Montrons que $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) = E$. Remarquons d'abord que $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$ et $\dim(\text{Ker}(u)) = n + 1 - \text{rg}(u)$.
Montrons que u est surjective : soit $Q = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$ un polynôme fixé. On cherche $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $u(P) = Q$.
Il suffit d'avoir $P(0) = a$ et $P(1) = b$, c'est à dire $a_0 = a$ et $\sum_{k=1}^{n} a_k = b$. En posant $a_0 = a, \quad a_1 = b - a$, et $a_k = 0$ pour tout $k \geq 2$, on a $u(P) = u(a_1 X + a_0) = aX + (b - a + a) = aX + b = Q$, donc P est un antécédent de Q.
Ainsi, $\text{rg}(u) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, on a donc finalement $\dim(\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}_1[X]) + \dim(\text{Ker}(u)) = 2 + n + 1 - 2 = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$. L'inclusion $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) \subset \mathbb{R}_n[X]$ entraine donc $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : Plus simplement, on peut se contenter de minorer la dimension de $\text{Ker}(u)$ en constatant que $\dim(\mathbb{R}_1[X]) = 2$, donc $-\text{rg}(u) \geq -2$ et ainsi $\dim(E) - \text{rg}(u) \geq n + 1 - 2$, d'où $\dim(\text{Ker}(u)) \geq n - 1$ d'après le théorème du rang.
Puisque $\text{Ker}(u)$ et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe,

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(u)) \oplus (\mathbb{R}_1[X]) &= \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\mathbb{R}_1[X]) \\ &\geq n - 1 + 2 \\ &\geq n + 1 \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) \subset E$ et que $\dim(E) = n + 1$ on en déduit que $\mathbb{R}_1[X] \oplus \text{Ker}(u) = E$.

Correction de l'exercice 10 : Sens direct : supposons que u et s commutent.
Soit $x \in \text{Ker}(s - \text{id})$. Alors $s(x) = x$, donc $u(x) = u(s(x)) = s(u(x))$ car u et s commutent. On en conclut que $s(u(x)) - u(x) = 0$, donc $u(x) \in \text{Ker}(s - \text{id})$. Ainsi, $\text{Ker}(s - \text{id})$ est stable par u.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$. Alors $s(x)=-x$, donc $u(x)=u(-s(x))=-u(s(x))=-s(u(x))$ car u et s commutent. On en conclut que $s(u(x))+u(x)=0$ donc $u(x)\in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$. Ainsi $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ est stable par u.

Sens indirect : supposons que $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont stables par u. s est une symétrie donc $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$. Soit $x\in E$, il existe $(x_1,x_2)\in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})\times\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ tels que $x=x_1+x_2$ et $s(x)=x_1-x_2$. Ainsi, $u(s(x))=u(x_1)-u(x_2)$ d'une part, et d'autre part $s(u(x))=s(u(x_1))+s(u(x_2))$. Or par hypothèse, $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$ sont stables par u, donc $u(x_1)\in\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id})$ et $u(x_2)\in\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id})$. On en déduit que $s(u(x_1))=x_1$ et $s(u(x_2))=-u(x_2)$. Finalement, $s(u(x))=u(x_1)-u(x_2)=u(s(x))$, et ceci étant vrai quel que soit $x\in E$ on en conclut que s et u commutent.

Correction de l'exercice 11 : s est une symétrie donc $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.
En choisissant une base $(e_1,e_2,\dots,e_r)$ de $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et une base $(e_{r+1},\dots,e_n)$ de $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ on obtient une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_r,e_{r+1},\dots,e_n)$ de E.

Dans cette base, la matrice de s est la matrice par bloc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & -I_{n-r}\end{array}\right)$.
Ainsi $\mathrm{tr}(s)=r-(n-r)=2r-n$ (la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base dans laquelle on écrit sa matrice représentative).
Finalement, $n-\mathrm{tr}(s)=2n-2r=2(n-r)$ donc est un entier pair.

Correction de l'exercice 12 :

1) De l'inclusion $\mathrm{Im}(p)\subset\mathrm{Ker}(q)$ on déduit que $q\circ p=0$.

$$\begin{aligned} r^2 &= (p+q-p\circ q)\circ(p+q-p\circ q)\\ &= p^2+p\circ q-p^2\circ q+q\circ p+q^2-q\circ p\circ q-p\circ q\circ p-p\circ q^2+p\circ q\circ p\circ q\\ &= p+p\circ q-p\circ q+0+q-0-0-p\circ q+0\\ &= p+q-p\circ q\\ &= r\end{aligned}$$

donc r est un projecteur.

2) Si $x\in\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$, alors $r(x)=p(x)+q(x)-p(q(x))=0+0-p(0)=0$ donc $x\in\mathrm{Ker}(r)$.
Réciproquement, si $x\in\mathrm{Ker}(r)$, alors $p(x)+q(x)-p(q(x))=0$ (1). En composant par q de chaque côté on obtient $q^2(x)=0$ car $q\circ p=0$, donc $q(x)=0$ et ainsi $x\in\mathrm{Ker}(q)$.
En reprenant l'égalité (1) on en déduit immédiatement $p(x)=0$ donc $x\in\mathrm{Ker}(p)$, finalement $x\in\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$.
On a donc bien $\mathrm{Ker}(r)=\mathrm{Ker}(p)\cap\mathrm{Ker}(q)$.

Montrons que $\mathrm{Im}(r)=\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$
Soit $x\in\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q)$. Alors $x\in\mathrm{Ker}(q)$ car $\mathrm{Im}(p)\subset\mathrm{Ker}(q)$, donc $x\in\mathrm{Ker}(q)\cap\mathrm{Im}(q)$ et comme q est un projecteur $\mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ sont en somme directe donc $x=0$. On en déduit que $\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(q)=\{0\}$.
Soit $x\in\mathrm{Im}(r)$. Il existe $y\in E$ tel que $p(y)+q(y)-p(q(y))=x$. Or, $p(y)+q(y)-p(q(y))=\underbrace{p(y-q(y))}_{\in\mathrm{Im}(p)}+\underbrace{q(y)}_{\in\mathrm{Im}(q)}$ donc $x\in\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$. On a montré que $\mathrm{Im}(r)\subset\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$.
Soit maintenant $x\in\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)$. Il existe $x_1\in\mathrm{Im}(p)$ et $x_2\in\mathrm{Im}(q)$ tels que $x=x_1+x_2$.
$x\in\mathrm{Im}(r)\iff r(x)=x$ car r est un projecteur. Or on a

$$\begin{aligned} r(x)&=r(x_1)+r(x_2)\\ &=p(x_1)+q(x_1)-p(q(x_1)+p(x_2)+q(x_2)-p(q(x_2))\end{aligned}$$

Or, $p(x_1)=x_1$ car $x_1\in\mathrm{Im}(p)$, $q(x_2)=x_2$ car $x_2\in\mathrm{Im}(q)$, et $q(x_1)=0$ car $\mathrm{Im}(p)\subset\mathrm{Ker}(q)$. On a donc

$$\begin{aligned} r(x)&=x_1+p(x_2)+x_2-p(x_2)\\ &=x_1+x_2\end{aligned}$$

donc $r(x)=x$, on en conclut que $x\in\mathrm{Im}(r)$ donc que $\mathrm{Im}(p)+\mathrm{Im}(q)\subset\mathrm{Im}(r)$, et finalement $\mathrm{Im}(r)=\mathrm{Im}(p)\oplus\mathrm{Im}(q)$.

Correction de l'exercice 13 :

1) D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(g)+\dim(\mathrm{Ker}(g))=\dim(\mathbb{R}^p)=p$. Ainsi, $\mathrm{rg}(g)=p-\dim(\mathrm{Ker}(g))\leq p$
2) L'inclusion $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset\mathrm{Im}(g)$ est évidente. De plus, $\mathrm{rg}(g)\leq p$ et $\mathrm{rg}(g\circ f)=p$ par hypothèse, ainsi $p=\dim(\mathrm{Im}(g\circ f))\leq\dim(\mathrm{Im}g)\leq p$ donc toutes ces inégalités sont des égalités, on en conclut donc que $\mathrm{Im}(g\circ f)=\mathrm{Im}(g)$.
Ainsi, $\mathrm{Im}(g)=p$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(g))=0$ selon le théorème du rang, on en déduit que $\mathrm{Ker}(g)=\{0\}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Alors $g(x) \in \operatorname{Im}(g)$ donc $g(x) \in \operatorname{Im}(g\circ f)$ d'après la question précédente. On en déduit que $g\circ f(g(x)) = g(x)$ car $g \circ f$ est un projecteur.
4) Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $g(f(g(x))) = g(x)$ donc $g(f(g(x)) - x) = 0$.
   on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $f(g(x)) - x \in \operatorname{Ker}(g)$ donc $f(g(x)) - x = 0$, et ainsi $f(g(x)) = x$. On a montré que $f \circ g = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^p}$.

Correction de l'exercice 14 :

1) On a :

$$(a + b) \circ (a - b) = a^2 - a \circ b + b \circ a - b^2 = -a \circ b + b \circ a$$

   et

$$(a - b) \circ (a + b) = a^2 + a \circ b - b \circ a - b^2 = a \circ b - b \circ a = -(a + b) \circ (a - b)$$

2) Soit $x \in E$, $(a(b(x)) - b(a(x)) = (a - b) \circ (a + b)(x) = -(a + b)(a - b)(x)$ d'après la question précédente donc appartient à $\operatorname{Im}(a - b)$ et à $\operatorname{Im}(a + b)$.
3) Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im}(a + b) \cap \operatorname{Im}(a - b)$. Alors il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = (a + b)(x_1) = (a - b)(x_2)$.
   On a donc $(a - b)(y) = (a - b) \circ (a + b)(x_1) = a(b(x_1)) - b(a(x_1))$ d'une part, et $(a + b)(y) = (a + b) \circ (a - b)(x_2) = b(a(x_2)) - a(b(x_2))$ d'autre part.
   En sommant ces deux égalités on obtient :

$$2a(y) = (a \circ b - b \circ a)(x_1 - x_2)$$

   Or $a^2 = \operatorname{Id}_E$ donc en composant par a on trouve :

$$\begin{aligned} 2y &= (a^2 \circ b - a \circ b \circ a)(x_1 - x_2) \\ &= (b - a \circ b \circ a)(x_1 - x_2) \\ &= ((b \circ a - a \circ b) \circ a)(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

   donc $y = -\dfrac{1}{2}(a \circ b - b \circ a)(a(x_1 - x_2))$ et ainsi $y \in \operatorname{Im}(a \circ b - b \circ a)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.

Correction de l'exercice 15 :

1) s est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$: $s(\lambda P + Q)(X) = (\lambda P + Q)(1 - X) = \lambda P(1 - X) + Q(1 - X) = \lambda s(P)(X) + s(Q)(X)$ et si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ alors $P(1 - X) = \sum_{k=0}^n a_k (1 - X)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-1)^i X^i$ donc $\deg(P(1 - X)) \leq n$.
   L'égalité $s^2 = \mathrm{id}$ est tout aussi claire : pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a $s(s(P))(X) = s(P)(1 - X) = P(1 - (1 - X)) = P(X)$ donc $s(s(P)) = P$.

2) Supposons que $P(1 - X) = P(X)$. Alors, $P\left(\frac{1}{2} + X\right) = P\left(1 - \left(\frac{1}{2} + X\right)\right) = P\left(\frac{1}{2} - X\right)$. On en déduit que la courbe représentative de P est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$.
   Réciproquement, tout polynôme qui vérifie $P(\frac{1}{2} + X) = P(\frac{1}{2} - X)$ vérifie $P(1 - X) = P(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - X) = P(\frac{1}{2} - (\frac{1}{2} - X) = P(X)$.
3)

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}) &\ \underline{\text{ssi}}\ P(1 - X) = P(X) \\ &\ \underline{\text{ssi}}\ \text{la courbe représentative de } P \text{ est symétrique par rapport à la droite } x = \frac{1}{2} \\ &\ \underline{\text{ssi}}\ \text{la courbe représentative de } P(X + \frac{1}{2} \text{ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées} \\ &\ \underline{\text{ssi}}\ \text{le polynôme } Q(X) = P\left(X + \frac{1}{2}\right) \text{ définit une fonction paire} \end{aligned}$$

4) Si $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors

$$\begin{aligned} Q \text{ définit une fonction paire } &\ \underline{\text{ssi}}\ Q(X) = Q(-X) \\ &\ \underline{\text{ssi}}\ \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n a_k (-X)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{ssi}} \sum_{k=0}^{n} a_k(X^k - (-X)^k) = 0 \\
&\underline{\text{ssi}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} 2a_k X^k = 0 \\
&\underline{\text{ssi}} \ \forall k \in [\![0, n]\!],\ k \text{ impair},\ a_k = 0
\end{aligned}$$

5) φ est clairement une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et l'application $\mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P(X) \mapsto P(X - \frac{1}{2})$ est sa bijection réciproque.
D'après les questions précédentes on a

$$\begin{aligned}
P \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}) \ &\underline{\text{ssi}} \ Q(X) = P(X + \frac{1}{2}) \text{ définit une fonction paire} \\
&\underline{\text{ssi}} \ Q(X) = P(X + \frac{1}{2}) \text{ a tous ses termes de degré impair nuls} \\
&\underline{\text{ssi}} \text{ il existe } (q_0, q_2, \ldots, q_{2E(n/2)}) \in \mathbb{R}^{E(n/2)+1} \text{ tel que } P\left(X + \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} q_{2k} X^{2k}
\end{aligned}$$

où $E(n/2)$ désigne la partie entière de $n/2$.
Ainsi, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ est l'image de $F = \mathrm{Vect}\left(1, X^2, X^4, \ldots, X^{2E(n/2)}\right)$ par l'automorphisme de $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P\left(X - \frac{1}{2}\right)$.
Une base de $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ est donc $(\varphi^{-1}(1), \varphi^{-1}(X^2), ..., \varphi^{-1}(X^{2E(n/2)}))$, avec pour tout $k \in [\![0, E(n/2)]\!]$ on a $\varphi^{-1}(X^{2k}) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-2)^{i-2k} X^i$

De même, $P \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) \iff P(X) = -P(1 - X) \iff P\left(\frac{1}{2} + X\right) = -P\left(\frac{1}{2} - X\right)$.
Ainsi, en posant $Q(x) = P\left(x + \frac{1}{2}\right)$ on trouve que $P \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ si et seulement si Q est impaire, si et seulement si tous ses coefficients de degré pair sont nuls (exercice).
On en déduit que $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ est l'image de $F = \mathrm{Vect}\left(X, X^3, \ldots, X^{2E(n/2)-1}\right)$ par $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto P\left(X - \frac{1}{2}\right)$. En effet, $P \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}) \iff P\left(X + \frac{1}{2}\right) \in F \iff \varphi(P) \in F \iff P \in \varphi^{-1}(F)$.
Une base de $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ est donc $(\varphi^{-1}(X), \varphi^{-1}(X^3), \ldots, \varphi^{-1}(X^{2E((n-1)/2)+1}))$ avec pour tout $k \in [\![0, E((n-1)/2)]\!]$, $\varphi^{-1}(X^{2k+1}) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^{2k+1} = \sum_{i=0}^{2k+1} \binom{2k+1}{i} (-2)^{i-2k-1} X^i$.

Correction de l'exercice 16 :

1) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) &= \frac{1}{2}(s \circ (\lambda f + \mu g) + (\lambda f + \mu g) \circ s) \\
&= \frac{1}{2}(\lambda(s \circ f - f \circ s)) + \frac{1}{2}(\mu(s \circ g - g \circ s)) \\
&= \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)
\end{aligned}$$

φ est linéaire et est bien à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ donc c'est un endomorphisme de E.

2) Montrons que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$:
Si $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc $x = -x$ d'où $x = 0$, la somme est donc directe.
Si $x \in E$, alors $x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)}$ donc $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$.
On a donc bien $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$. E est somme directe de sous espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1, donc s est diagonalisable et $Spec(s) \subset \{-1, 1\}$.
Puisque $s \neq \mathrm{Id}_E$, 1 n'est pas la seule valeur propre de s, et puisque $s \neq -\mathrm{Id}_E$, -1 n'est pas la seule valeur propre de s. On a donc bien $Spec(s) = \{-1, 1\}$.

3) On a

$$\begin{aligned}
f \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \frac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) = 0 \\
&\iff s \circ f = -f \circ s
\end{aligned}$$

Supposons que $f(E_1) \subset E_{-1}$ et $f(E_{-1}) \subset E_1$
Pour tout $x = x_1 + x_{-1} \in E = E_1 \oplus E_{-1}$ on a donc d'une part :

$$s(f(x)) = s(f(x_1)) + s(f(x_{-1})) = -f(x_1) + f(x_{-1})$$

car $f(x_1) \in E_{-1}$, et d'autre part :

$$f(s(x)) = (f(x_1 - x_{-1}) = f(x_1) - f(x_{-1})$$

et $f(x_{-1}) \in E_1$. On a donc bien $s(f(x)) = -f(s(x))$ pour tout $x \in E$ donc $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Réciproquement, supposons que $s \circ f = -f \circ s$. Soit $x_1 \in E_1$ et $x_{-1} \in E_{-1}$. Alors $x_1 = s(x_1)$ donc $f(x_1) = f(s(x_1)) = -s(f(x_1))$. Ainsi $f(x_1) \in \mathbb{E}_{-1}$ donc $f(E_1) \subset E_{-1}$
De même, $x_{-1} = -s(x_{-1})$ donc $f(x_{-1}) = -f(s(x_{-1})) = s(f(x_{-1}))$ d'où $f(x_{-1}) \in E_1$ donc $f(E_{-1}) \subset E_1$.

4) Par hypothèse, $\varphi(f) = \dfrac{1}{2}(s \circ f + f \circ s) = \lambda f$.
Si $x \in E_1$ on a donc :

$$\frac{1}{2}s(f(x)) + \frac{1}{2}f(s(x)) = \lambda f(x)$$

donc

$$\frac{1}{2}s(f(x)) + \frac{1}{2}f(x) = \lambda f(x)$$

donc

$$s(f(x)) = (2\lambda - 1)f(x)$$

Si $x \in E_{-1}$ on a :

$$\frac{1}{2}s(f(x)) + \frac{1}{2}f(s(x)) = \lambda f(x)$$

donc

$$\frac{1}{2}s(f(x)) - \frac{1}{2}f(x) = \lambda f(x)$$

donc

$$s(f(x)) = (2\lambda + 1)f(x)$$

5) On reprend les hypothèses et notation de la question précédente. Puisque f est un vecteur propre de φ elle est non nulle. Comme $E = E_1 \oplus E_{-1}$, $f(x)$ est non nul pour un vecteur x appartenant à E_1 ou à E_{-1}.
Si $x \in E_1$ et $f(x) \neq 0$, alors $f(x)$ est un vecteur propre de s associé à la valeur propre $2\lambda - 1$, donc $2\lambda - 1 = 1$ ou $2\lambda - 1 = -1$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.
Si $x \in E_{-1}$ et $f(x) \neq 0$, alors $f(x)$ est un vecteur propre de s associé à la valeur propre $2\lambda + 1$ donc $2\lambda + 1 = 1$ ou $2\lambda + 1 = -1$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = -1$.
Dans tous les cas, on a $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, donc $Spec(\varphi) \subset \{-1, 0, 1\}$.

6) Un candidat possible serait $P(X) = X(X-1)(X+1) = X^3 - X$, le polynôme dont les racines sont les valeurs propres possibles de φ.
On a pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$s(f) = \frac{1}{2}(s \circ f - f \circ s)$$

$$\begin{aligned}
s^2(f) &= \frac{1}{2}\left(s \circ \left(\frac{1}{2}s \circ f - \frac{1}{2}f \circ s\right) - \left(\frac{1}{2}s \circ f - \frac{1}{2}f \circ s\right) \circ s\right) \\
&= \frac{1}{4}f - \frac{1}{4}s \circ f \circ s - \frac{1}{4}s \circ f \circ s + \frac{1}{4}f \\
&= \frac{1}{2}(f - s \circ f \circ s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^3(f) &= \frac{1}{2}\left(s \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}s \circ f \circ s\right) - \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}s \circ f \circ s\right) \circ s\right) \\
&= \frac{1}{4}s \circ f - \frac{1}{4}f \circ s - \frac{1}{4}f \circ s + \frac{1}{4}s \circ f \\
&= \frac{1}{2}(s \circ f - f \circ s) \\
&= s(f)
\end{aligned}$$

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $s^3(f) - s(f) = 0$ donc $s^3 - s = 0$ donc $P(s) = 0$.